Aufgaben: Funktionen mit zwei Variablen

Aufgabe 1

Zeichnen Sie die angegebenen Niveaulinien der folgenden Funktionen:

(1) $f(x,y)=x-2\cdot y \qquad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}^2 \quad \overline{z}=-2, \overline{z}=0, \overline{z}=4$

(2) $f(x,y)=x-y^2 \qquad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}^2 \quad \overline{z}=2, \overline{z}=5$

(3) $f(x,y)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \quad \mathbb{D}_{fx}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq 0\right\}, \mathbb{D}_{fy}=\left\{y\in\mathbb{R}\,\middle|\,y\geq 0\right\} \quad \overline{z}=1, \overline{z}=2$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie sämtliche ersten und zweiten Ableitungen.

(1) $f(x,y)=3\cdot x\cdot y \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}^2$

(2) $f(x,y)=(x\cdot y)^3 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}^2$

(3) $f(x,y)=-y^4+3\cdot x^2\cdot y+2\cdot x\cdot y-x \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}^2$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie folgende Funktion auf Hochpunkte und Tiefpunkte:

$$f(x,y)=\frac{3}{2}\cdot x^2+4\cdot x\cdot y+4\cdot y^2+61\cdot x+108\cdot y \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}^2$$

Aufgabe 4

Eine Firma produziert das Gut X mit Hilfe zweier Produktionsfaktoren. Dabei gilt:

- v_1: Einsatzmenge von Produktionsfaktor 1,
- v_2: Einsatzmenge von Produktionsfaktor 2,
- $q_1=4€$: Kosten für eine Einheit von Produktionsfaktor 1,
- $q_2=2€$: Kosten für eine Einheit von Produktionsfaktor 2,
- $K_f=750.000,00€$: Fixkosten,
- Produktionsmenge: $x=X(v_1,v_2)=5.300\cdot\ln(v_1+1)+3.600\cdot\ln(v_2+1)$,
- $p=12€$: Verkaufspreis pro Stück von Gut X.

(1) Stellen Sie den Gewinn als eine Funktion $G(v_1, v_2)$ dar.

(2) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Faktoreinsatzmengen, die gewinnmaximale Produktionsmenge und den maximalen Gewinn.

Aufgabe 5

Eine Frau will sich die beiden Güter X und Y kaufen. Ihre Nutzenfunktion ist $U(x, y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$. Dabei ist x ist die Menge von Gut X, und y ist die Menge von Gut Y. Ein Stück von Gut X kostet $p_x = 2€$, und ein Stück von Gut Y kostet $p_y = 1€$. Die Frau möchte insgesamt $12€$ ausgeben.

Bei welchen Mengen x und y ist ihr Nutzen maximal? (Sie brauchen die zweiten Ableitungen nicht zu prüfen.)

Aufgabe 6

Wir haben die Lagrange-Funktion $L(\lambda, x, y) = 3 \cdot x + 4 \cdot y - 5 - \lambda \cdot (x^2 - y - 1)$. Aus $L'_\lambda(\lambda, x, y) = 0$, $L'_x(\lambda, x, y) = 0$ und $L'_y(\lambda, x, y) = 0$ erfährt man, dass an der Stelle $x = -\frac{3}{8}, y = -\frac{55}{64}$ ein Minimum oder Maximum mit $\lambda = -4$ sein kann. Prüfen Sie, ob an dieser Stelle ein Minimum oder ein Maximum ist.